6.4.4 Elihu-Thomson

******

1 Motivation

Ein als Sekundärspule dienender geschlossener Aluminiumring wird durch Selbstinduktion von der Primärspule abgestossen und in die Höhe geschleudert. Ein offener Aluminiumring bleibt dagegen liegen.

2 Experiment

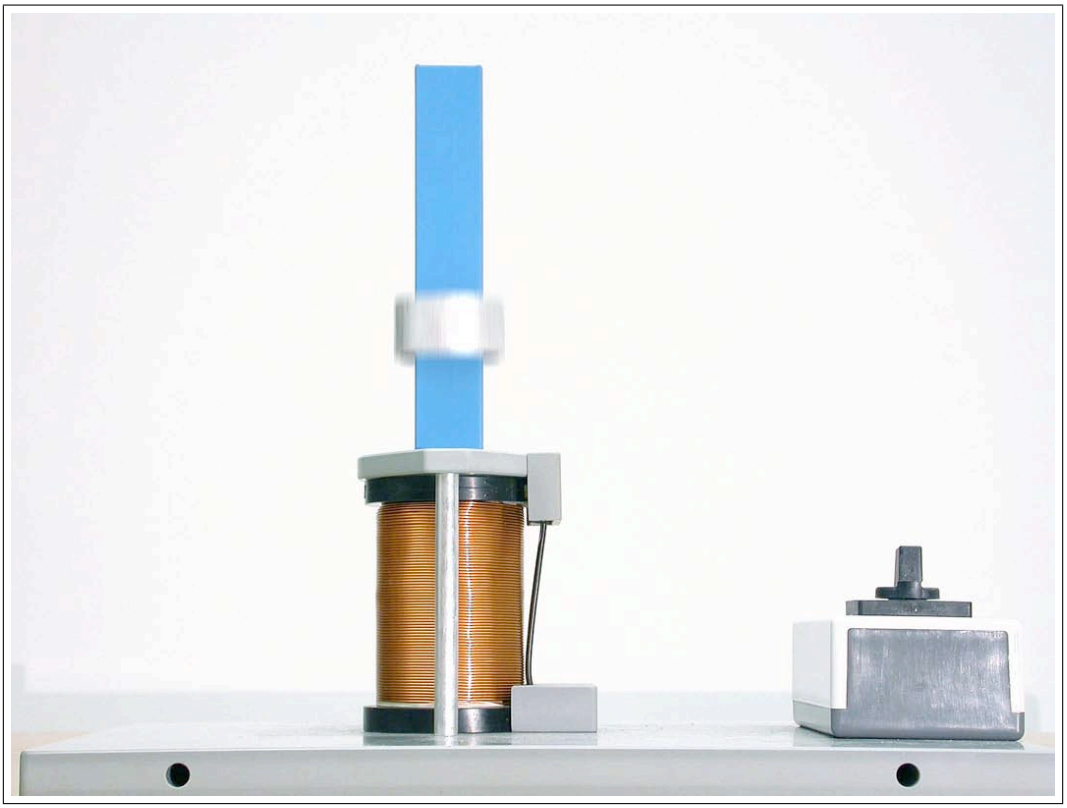

Abbildung 1: Induktion mit geschlossenem Aluminiumring

Auf ein senkrecht stehendes, eng gewickeltes Solenoid (Primärspule) wird am oberen Ende ein Aluminiumring als Sekundärspule gelegt. Das Solenoid wird über einen Schalter an die Wechselspannungsquelle ($\nu = 50\,\mathrm{Hz}$) angeschlossen (siehe Abb. 1). Man verwendet sowohl einen geschlossenen als auch einen offenen Aluminiumring (siehe Abb. 2).

a) Der geschlossene Aluminiumring wird etwa 4 m in die Höhe geschleudert,

b) hält man ihn aber auf der Unterlage fest, dann erwärmt er sich stark,

c) der durchgesägte Aluminiumring dagegen bleibt liegen.

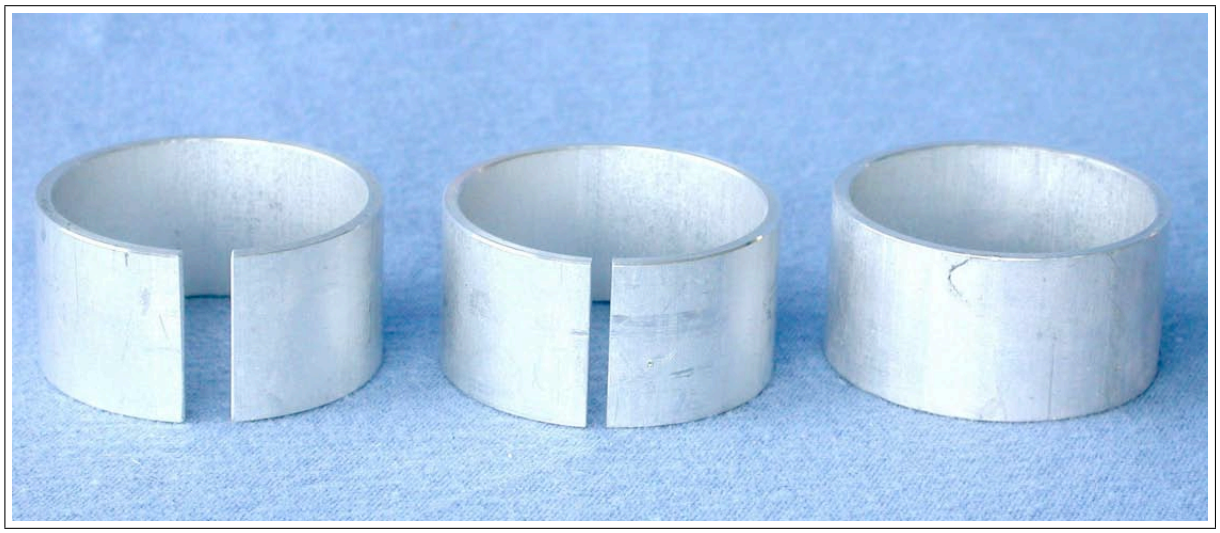

Abbildung 2: Drei verschiedene Aluminiumringe

3 Theorie

3.1 Das Induktionsgesetz

Ein zeitlich veränderliches Magnetfeld erzeugt nach Maxwell ein elektrisches Wirbelfeld (siehe Abb. 3):

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1}$$

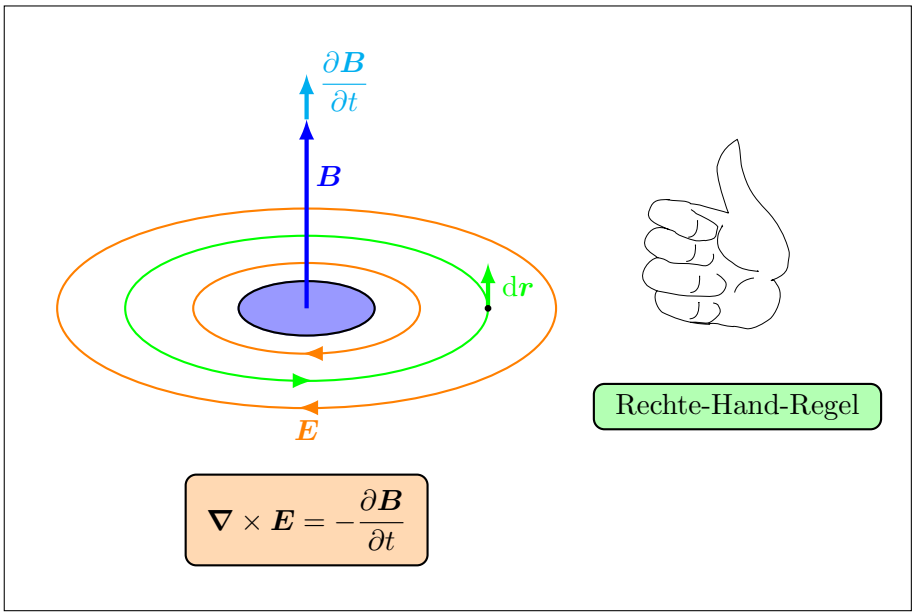

Abbildung 3: Die Richtung der induzierten $\boldsymbol{E}$-Feldes. Das Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ zeigt nach oben und nimmt mit der Zeit zu.

Wir integrieren Gl. (1) über die von der Kurve $\mathcal{C}$ umrandeten Fläche $\mathcal{A}$ und formen das Oberflächenintegral auf der linken Seite mithilfe des Stokesschen Satzes in ein Linienintegral über $\mathcal{C}$ um; beim Integral auf der rechten Seite nehmen wir an, dass sich die Geometrie zeitlich nicht ändert, so dass wir das Flächenintegral mit der Zeitableitung vertauschen können:

$$-\int_{\mathcal{A}} (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \int_{\mathcal{A}} \left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} \tag{2}$$

$$\Rightarrow \quad -\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{A}} \underbrace{\boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}}_{\equiv \mathrm{d}\Phi} = \dot{\Phi} \tag{3}$$

Damit erhalten wir für die induzierte Spannung U_{ind}:

$$\boxed{U_{\mathrm{ind}} = +\dot{\Phi}\,,} \tag{4}$$

wobei Φ der magnetische Fluss durch die von $\mathcal{C}$ umschlossenen Kurve ist.

In den meisten Lehrbüchern erscheint fälschlicherweise ein negatives Vorzeichen in dieser Gleichung. Um dies aber zu erreichen, wird die Spannung $U_{1(0)}$ eines Punktes (1) bezüglich eines Punktes (0) für elektrische Wirbelfelder entgegengesetzt zur Spannung in Potentialfeldern definiert:

$$\boxed{\begin{aligned} U_{1(0)} &= -\int_0^1 \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \quad \text{Potentialfeld} \\ U_{1(0)} &= +\int_0^1 \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \quad \text{Wirbelfeld} \end{aligned}} \qquad \text{Falsch!} \tag{5}$$

Zum Beweis für unsere Behauptung berechnen wir die elektrische Spannung $U_{1(0)}$ des Punktes **1** bezüglich des Punktes **0** für ein Potential- und für ein Wirbelfeld (siehe Abb. 4). Wir verwenden dazu jeweils eine positive Probeladung q, auf die ja die Kraft $\boldsymbol{F}$ in Richtung des elektrischen Feldes gemäss

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} \tag{6}$$

wirkt, was einer *negativen* Spannung entspricht.

Als Beispiel für ein Potentialfeld wählen wir das Feld eines Plattenkondensators:

$$U_{1(0)} = -\int_0^1 \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} < 0 \tag{7}$$

Das Wirbelfeld werde durch die zeitliche Änderung $\dot{\boldsymbol{B}}$ der magnetischen Flussdichte $\boldsymbol{B}$ erzeugt, welche im Bild in die Zeichenebene hineinzeigt. Damit ist das induzierte $\boldsymbol{E}$-Feld entgegengesetzt zum Uhrzeigersinn gerichtet. Beim Verschieben der Probeladung auf dem Kreisbogen vom Punkt **0** zum Punkt **1** gewinnt die Ladung Energie, so dass für die Spannung gilt:

$$U_{1(0)} = -\int_0^1 \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} < 0 \tag{8}$$

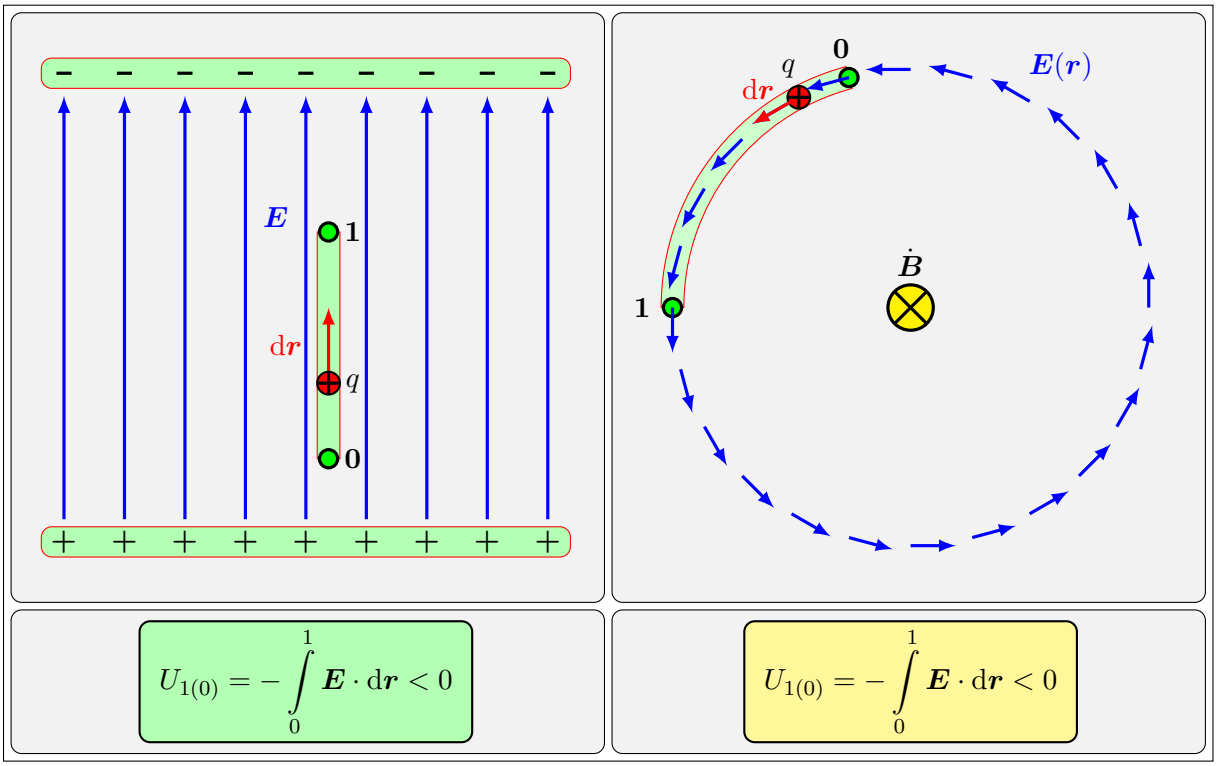

Abbildung 4: Elektrische Spannung $U_{1(0)}$ des Punktes **1** bezüglich des Punktes **0** für ein Potential- und für ein Wirbelfeld. Die zeitliche Änderung $\dot{\boldsymbol{B}}$ der magnetischen Flussdichte $\boldsymbol{B}$ zeigt in die Zeichenebene hinein. In beiden Fällen *gilt dieselbe Definition der Spannung*, die bei beiden Beispielen negativ ist, so dass die positive Ladung q beschleunigt wird und das Feld Arbeit leistet.

Wir müssen nun noch zeigen, dass für das *Ringintegral* Gln. (3) und (4) gelten. Die in Richtung des $\boldsymbol{E}$-Feldes berechnete Spannung ist

$$U_{\mathrm{ind}} = -\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} < 0 \tag{9}$$

Der zu dieser Orientierung gehörende Flächenvektor $\boldsymbol{A}$ zeigt aus der Papierebene heraus, so dass für die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses folgt:

$$\dot{\Phi} = \dot{\boldsymbol{B}} \cdot \boldsymbol{A} = -|\dot{\boldsymbol{B}}| \cdot |\boldsymbol{A}| < 0 \tag{10}$$

Aus den identischen Vorzeichen von U_{ind} und $\dot{\Phi}$ folgt schliesslich die Gültigkeit der Gl. (4).

Wenn wir nun die Integrationsrichtung in Gl. (7) umkehren,

$$U_{0(1)} = -\int_1^0 \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} > 0 \tag{11}$$

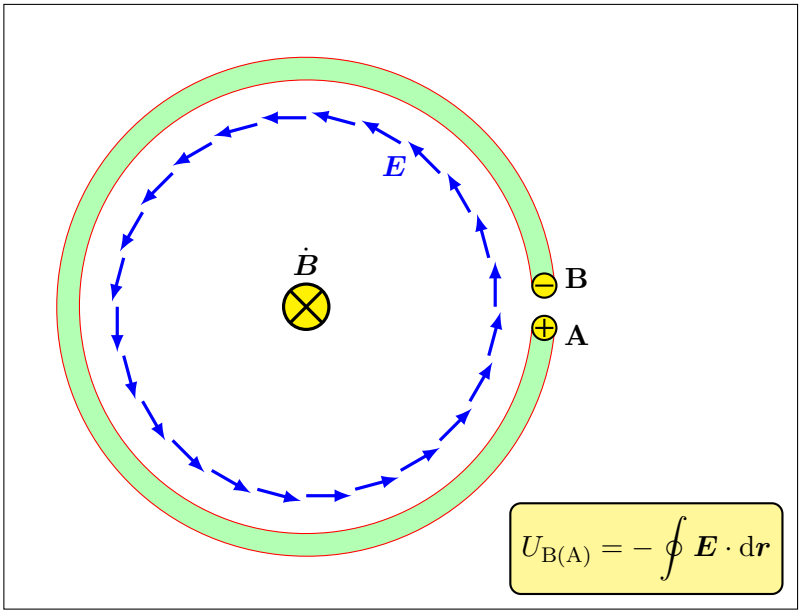

Abbildung 5: Die in der Schleife induzierte Spannung ist gleich dem Linienintegral des elektrischen Feldes über die Schleife. Das Innere der Leiterschleife ist feldfrei!

erhalten wir die positive Spannung

$$U_{0(1)} = -U_{1(0)} > 0\,, \tag{12}$$

so dass auch das Ringintegral in Gl. (9) das Vorzeichen wechselt und bei dieser Integrationsrichtung positiv wird. Nun hängt aber der Flächenvektor $\boldsymbol{A}$ als Axialvektor vom Drehsinn seiner Umrandung ab, das heisst, $\boldsymbol{A}$ wechselt ebenfalls das Vorzeichen, so dass auch der Fluss des Magnetfeldes nun positiv ist. Damit gilt unabhängig von der Integrationsrichtung

$$\boxed{U_{\text{ind}} = +\dot{\Phi}} \tag{13}$$

3.2 Offene Leiterschleife im veränderlichen Magnetfeld

Wir betrachten eine Leiterschleife in einem Magnetfeld. Wir nehmen an, dass sich das Feld mit der Zeit ändert. Eine Spannung wird induziert. Siehe Abb. 5. Da die Leitungselektronen im Metall beweglich sind, werden sie im Uhrzeigersinn so lange verschoben, bis das von ihnen erzeugte elektrische Feld das äussere, induzierte Feld kompensiert. Aus diesem Grund ist der Pol **B** negativ, der Pol **A** dagegen positiv geladen. Weil das Ringintegral über den Kreis nicht verschwindet, gilt

$$U_{B(A)} = -\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{14}$$

Demnach fällt die gesamte Spannung zwischen den beiden Polen ab, und die elektrische Feldstärke ist entsprechend dem Verhältnis von Polspalt zu Kreisumfang vergrössert! Da der Leiter nicht geschlossen ist, fliesst kein Strom.

3.3 Geschlossene Leiterschleife im veränderlichen Magnetfeld

In einer geschlossenen Leiterschleife bewirkt das induzierte elektrische Feld einen Strom. Die Stromdichte $\boldsymbol{j}$ beträgt bei rein Ohmschem Widerstand

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}\,, \tag{15}$$

wobei σ die elektrische Leitfähigkeit bedeutet.

Das Feld der Primärspule sei gegeben durch

$$\boldsymbol{B}(t) = \boldsymbol{B}_0 \sin \omega t \tag{16}$$

Dann ist

$$\boldsymbol{E}(t) = \boldsymbol{E}_0 \cos \omega t \quad \Rightarrow \quad U(t) = U_0 \cos \omega t \tag{17}$$

Die Induktivität L der Sekundärspule bewirkt eine Selbstinduktion, welche die induzierte Spannung schwächt. Es gilt daher

$$U - L\dot{I} = RI\,, \tag{18}$$

wobei R der Ohmsche Widerstand ist.

Wir lösen die Differentialgleichung (18) mit dem Ansatz

$$U = U_0 e^{i\omega t} \quad \text{und} \quad I = I_0 e^{i(\omega t + \psi)} \tag{19}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} U_0 e^{i\omega t} - i\omega L I_0 e^{i(\omega t+\psi)} &= R I_0 e^{i(\omega t+\psi)} \\ \Rightarrow \quad U_0 - i\omega L I_0 e^{i\psi} &= R I_0 e^{i\psi} \\ I_0 e^{i\psi} &= \frac{U_0}{R + i\omega L} \\ e^{i\psi} &= \frac{U_0}{I_0} \cdot \frac{R - i\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{aligned} \sin\psi &= -\frac{U_0}{I_0} \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \\ \cos\psi &= \frac{U_0}{I_0} \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} \\ \Rightarrow \quad \tan\psi &= -\frac{\omega L}{R} \end{aligned} \tag{20}$$

Wir unterscheiden im Folgenden zwei Fälle:

$$\begin{cases} \omega L \gg R & \Rightarrow \quad I = I_0 e^{i(\omega t - \pi/2)} \\ \omega L \ll R & \Rightarrow \quad I = I_0 e^{i\omega t} \end{cases} \tag{21}$$

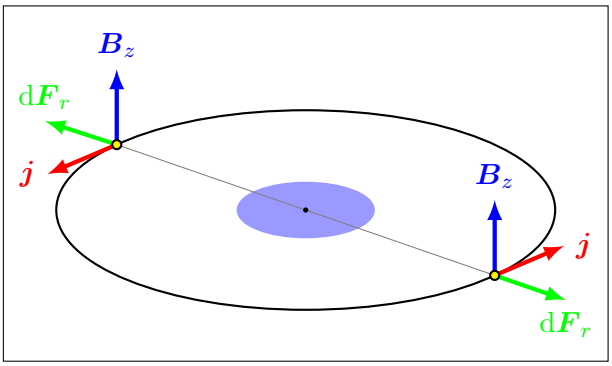

Abbildung 6: Kraftwirkung der magnetischen Flussdichte $\boldsymbol{B}_z$ auf ein Leiterstück der Länge $\mathrm{d}s$.

Als nächstes berechnen wir die Kraft, die vom inhomogenen Magnetfeld $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ der Primärspule auf die Leitungselektronen und damit auf die Stromdichte $\boldsymbol{j}$ in der Sekundärspule ausgeübt wird. Die senkrechte Achse der Primärspule sei die z-Achse. Dann ist die Stromdichte

$$\boldsymbol{j} = j_0 \cos\omega t \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = j_0 \cos\omega t\, \boldsymbol{e}_\varphi \tag{22}$$

mit dem Azimutwinkel φ.

Das (rotationsinvariante) Magnetfeld stellen wir in Zylinderkoordinaten dar:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{B}(r,z,t) = B_r\boldsymbol{e}_r + B_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + B_z\boldsymbol{e}_z \tag{23}$$

Die Lorentzkraft auf die Ladung q eines Elektrons (negative Ladung!) der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_i$ beträgt

$$\boldsymbol{F}_i = q_i\boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{B} \tag{24}$$

Die Kraft $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ auf ein Leiterstück der Länge $\mathrm{d}s$ und mit Querschnitt A beträgt dann

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B})\,A\,\mathrm{d}s = (\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B})\,A\,r\,\mathrm{d}\varphi \tag{25}$$

Wir berechnen zunächst das Vektorprodukt $(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B})$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B} &= (-j_0\,\boldsymbol{e}_\varphi)\times(B_r\boldsymbol{e}_r + B_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + B_z\boldsymbol{e}_z)\\ &= j_0\,(B_r\boldsymbol{e}_z - B_z\boldsymbol{e}_r)\end{aligned} \tag{26}$$

Das negative Vorzeichen bei der Stromdichte ist auf das negative Vorzeichen in der Maxwellgleichung zurückzuführen. Bei nach oben zunehmenden Magnetfeld ist der Strom im Uhrzeigersinn gerichtet, also in Richtung von $-\boldsymbol{e}_\varphi$.

Im Gegensatz zur z-Komponente verschwindet die Radialkomponente der Kraft bei der Integration der Kraft über den gesamten Ring aus Symmetriegründen (siehe Abb. 6).

Die resultierende Kraft ist damit

$$\boldsymbol{F} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\boldsymbol{F} = j_0 B_r A r\cdot\boldsymbol{e}_z \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \tag{27}$$

$$= j_0 B_r\, A\cdot 2\pi r\cdot\boldsymbol{e}_z \tag{28}$$

Mit $j_0 \cdot A = I$ erhalten wir schliesslich:

$$\boxed{\boldsymbol{F} = 2\pi r I B_r \cdot \boldsymbol{e}_z} \tag{29}$$

Als Letztes untersuchen wir noch die Zeitabhängigkeit der Kraft. Der induzierte Strom beträgt gemäss Gl. (21)

$$I(t) = I_\rho \cos\omega t + I_\lambda \sin\omega t\,, \tag{30}$$

wobei wir beide Extremfälle von Gl. (21) gleichzeitig behandeln ($\omega L \gg R \rightarrow I_\rho = 0, I_\lambda > 0$) und ($\omega L \ll R \rightarrow I_\rho > 0, I_\lambda = 0$). Die Zeitabhängigkeit der resultierenden Kraft auf den Ring ist damit:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}(t) &= 2\pi r \cdot (B_{r,0} \sin\omega t) \cdot (I_\rho \cos\omega t + I_\lambda \sin\omega t) \cdot \boldsymbol{e}_z & (31)\\ &= 2\pi r B_{r,0} \left(I_\rho \sin\omega t \cos\omega t + I_\lambda \sin^2\omega t\right) \cdot \boldsymbol{e}_z & (32) \end{aligned}$$

Bei der Integration über eine Periode der Schwingung verschwindet der erste Term, während der zweite Term keine negativen Beiträge enthält und damit eine resultierende Kraft nach oben ergibt!

Die notwendige Bedingung für das Hochfliegen des Ringes ist damit eine grosse Selbstinduktivität L und ein kleiner Ohmscher Widerstand R!